УДК 621.833

А.М. ОНИШКОВА, соискатель ЮФУ, вед. специалист ООО ИТСК,
г. Ростов-на-Дону, Россия

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ С ПЕРЕМЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Разработан численный алгоритм решения плоской контактной задачи, заключающейся в определении минимума некоторого квадратичного функционала, заданного в области, содержащей заранее неизвестную границу. Последняя определяется из условия минимальности функционала. Рассмотрены задачи для плоской области. Двумерная задача решается методом сеток. Положение границы находится из условия минимума. Для поиска минимума использованы различные методы, в частности, генетические алгоритмы.

Розроблений чисельний алгоритм рішення плоскої контактної задачі, що полягає у визначенні мінімуму деякого квадратичного функціонала, заданого в області, що містить заздалегідь невідому межу. Остання визначається з умови мінімальності функціонала. Розглянуті завдання для плоскої області. Двовимірне завдання вирішується методом сіток. Положення межі знаходиться з умови мінімуму. Для пошуку мінімуму використані різні методи, зокрема, генетичні алгоритми.

The numerical algorithm of the flat contact problem decision consisting in definition of a minimum some square-law functional, set in the area containing in advance unknown border is developed. It is defined from a minimality condition of functional. Problems for flat area are considered. The two-dimensional problem dares a method of grids. Border position find from a minimum condition. For minimum search various methods, in particular, genetic algorithms are used.

Введение. Математические модели многих физических процессов приводят к плоским задачам о контакте полупространств с сухим трением, при котором поперечные эффекты и нормальное давление распределены по Герцу. Примером такой задачи является плоская задача для двух цилиндров, катящихся друг по другу с сухим трением.

Для решения таких контактных задач используются методы линейного программирования, также для решения задач с неизвестной границей широко применяются вариационные методы. Идея решения такой задачи состоит в определении экстремального или стационарного решения соответствующего функционала. Особенностью данного класса задач является то, что при варьировании нужно рассматривать не только неизвестные функции, но и положение неизвестной границы. Таким образом, математическая задача состоит в том, чтобы найти такие $u^*,\tilde{A}^*$: $I\left(u^*,\tilde{A}^*\right)=\min\limits_{\underline{u}\in H,\Gamma} I\left(\underline{u},\Gamma\right)$, где $\underline{u}$ – некоторые функции из определенного пространства H, а Γ – положение неизвестной границы. Математическая теория такого класса задач в определенной степени развита [8]. Вместе с тем, численное исследование таких задач встречает значительные сложности. В данной работе предложен некоторый численный алгоритм для решения задач с неизвестными границами.

Идея метода состоит в следующем.

Предположим, что нам известно какое-то положение $\tilde{A}$. Тогда, решая задачу поиска u $\min\limits_{u} I\left(u,\tilde{A}\right)$, можно найти $\tilde{u}$, соответствующей $\tilde{A}$. Подставляя $\tilde{u}$ в I, получим функционал, зависящий только от Γ:

$$\tilde{I}\left(\tilde{A}\right)=I\left(\tilde{u}(\tilde{A}),\tilde{A}\right).$$

Далее решаем задачу поиска минимума $\tilde{I}$

$$\min_{\tilde{A}}\tilde{I}\left(\tilde{u}(\tilde{A}),\tilde{A}\right).$$

Шаги алгоритма можно условно представить следующим образом:

1) Задается начальное положение границы: Γ_0.
2) Находится соответствующее решение $\underline{u}_0$.
3) Вычисляется $I_0=I\left(u_0,\tilde{A}_0\right)$.
4) Выверяется следующее приближение Γ_n.
5) Находится решение u_n : $\min\limits_{u} I\left(u,\tilde{A}_n\right)$.
6) Вычисляется $I_n=I\left(u_n,\tilde{A}_n\right)$.
7) Проверяется условие сходимости.

Ключевыми вопросами являются:

а) выбор следующей итерации Γ;

б) выбор условия сходимости минимизационной последовательности I_n.

В работе рассмотрены реализации данного метода двумерным задачам (Γ задается линией на плоскости). Показано, что в каждом из этих случаев предложенный алгоритм позволяет найти решение, т.е. как неизвестную функцию, так и положение границы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два тела, соприкасающихся по поверхности P, называемой зона контакта (см. рисунок 1).

Сила сцепления, прикладываемая телом 1 к телу 2, является функцией координаты и раскладывается на $Z(x)$ и $X(x)$, где $Z(x)$ – нормальная составляющая, перпендикулярная поверхности контакта, $X(x)$ – касательная сила сцепления (x – радиус-вектор точек поверхности), которая подчиняется закону Кулона-Амонтона, по которому зона контакта (E) делится на зоны скольжения (E_+) и сцепления (E_0):

$$E=E_+\cup E_0.$$

Для $Z(x)$ известно: $Z(x)\geq 0$ в R, $Z(x)=0$ вне зоны контакта.

В зоне скольжения:

$$X(x)=\mu Z(x)e(x),$$

где $e(x)=v(x)/\|v(x)\|$ – единичный вектор в направлении скольжения ($v\neq0$, $v(x)$ – местная скорость тела 1 относительно тела 2); μ – постоянный коэффициент трения (в общем случае переменный).

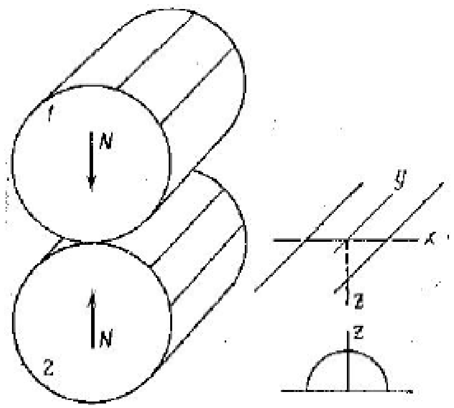

Рисунок 1 – Два прижатых друг к другу цилиндра

В области сцепления $v(x)=0$.

Кроме того, $\|X(x)\|\leq\mu Z(x)$.

Нормальное давление распределено по Герцу:

$$Z(x,t)=Q(t)\sqrt{[a(t)]^2-x^2}\ ;\quad Q(t)=\frac{1}{2A}\left\{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right\},$$

где R_i – радиус кривизны тела i в начале координат.

Задача состоит в минимизации разности между мощностью, рассматриваемой кулоновой силой сцепления, обусловленной скольжением, и мощностью, рассеиваемой силой сцепления, вызывающей это скольжение. Таким образом, неизвестная граница находится из условий минимума функционала

$$F=\int\limits_{\text{зона контакта}}\{\mu Z(x)\|v(x)\|-X(x)\cdot v(x)\}dx.$$

2. Генетический алгоритм. Отметим, что в результате мы решаем задачу минимума многих переменных. Для двумерной задачи число переменных равно удвоенному числу узлов, используемых для аппроксимации неизвестной границы. Поэтому существенным является вопрос о выборе метода поиска минимума. Перспективным классом алгоритмов являются так называемые генетические алгоритмы.

Генетический алгоритм – это метод решения задач оптимизации на основе естественного отбора, аналогично тому, как это происходит в процессе

биологической эволюции. В генетическом алгоритме происходит многократная модификация семейства отдельных решений. На каждом шаге в генетическом алгоритме проводится отбор выбранных наугад субъектов из полученного текущего решения, называемого родительским и которое используется для генерации последующего дочернего поколения. Посредством последовательного отбора поколений происходит "эволюция" по направлению к оптимальному решению.

В отличие от существующих методик, ГА начинает работу с некоторого случайного набора исходных решений, который называется популяцией. Каждый элемент из популяции называется хромосомой и представляет некоторое решение проблемы в первом приближении. Хромосома представляет собой строку символов некоторой природы, не обязательно бинарных. Хромосомы эволюционируют на протяжении множества итераций, носящих название поколений (или генераций). В ходе каждой итерации хромосома оценивается с использованием некоторой меры соответствия (англ. fitness function), которую мы будем называть функцией соответствия. Для создания следующего поколения новые хромосомы, называемые отпрысками, формируются либо путем скрещивания (англ. crossover) двух хромосом – родителей из текущей популяции, либо путем случайного изменения (мутации) одной хромосомы. Новая популяция формируется путем (а) выбора согласно функции соответствия некоторых родителей и отпрысков и (б) удаления оставшихся для того, чтобы сохранять постоянным размер популяции.

Хромосомы с большей функцией соответствия имеют больше шансов быть выбранными (выжить). После нескольких итераций алгоритм сходится к лучшей хромосоме, которая является либо оптимальным, либо близким к оптимальному решением.

Таким образом, используются два вида операций:

1. Генетические операции: скрещивание и мутация;

2. Эволюционная операция: выбор.

Генетические операции напоминают процесс наследования генов при создании нового отпрыска в каждой генерации.

Скрещивание является главной генетической операцией. Эта операция выполняется над двумя хромосомами- родителями и создает отпрыск путем комбинирования особенностей обоих родителей.

Этот метод работает очень хорошо, если хромосомы представляют собой битовые строчки. Кроме того, производительность всего генетического алгоритма в первую очередь зависит от производительности используемой операции скрещивания.

Мутация – это фоновая операция, производящая случайное изменение в различных хромосомах. Наипростейший вариант мутации состоит в случайном изменении одного или более генов. В ГА мутация играет важную роль для (а) восстановления генов, выпавших из популяции в ходе операции выбора, так что они могут быть опробованы в новых комбинациях, (б) формирования генов, которые не были представлены в исходной популяции.

Поиск является одним из наиболее универсальных методов нахождения решения для случаев, когда априори не известна последовательность шагов, ведущая к оптимуму.

Существуют две поисковые стратегии:

1. Эксплуатация наилучшего решения, например, градиентный метод

2. Исследование пространства решений. Примером является случайный поиск – метод, который исследует пространство решений, игнорируя исследование перспективных областей поискового пространства.

Генетический алгоритм представляет собой класс поисковых методов общего назначения, которые комбинируют элементы обоих стратегий. Использование этих методов позволяет удерживать приемлемый баланс между исследованием и эксплуатацией наилучшего решения. В начале работы генетического алгоритма популяция случайна и имеет разнообразные элементы. Поэтому оператор скрещивания осуществляет обширное исследование пространства решений. С ростом значения функции соответствия получаемых решений оператор скрещивания обеспечивает исследование окрестностей каждого из них. Другими словами, тип поисковой стратегии (эксплуатация наилучшего решения или исследование области решений) для оператора скрещивания определяется разнообразием популяции, а не самим этим оператором.

3. Алгоритм решения.

1. $-a \le x \le a$. Задаем a, h – шаг разбиения, μ.

2. Принимаем, что сила сцепления описывается кусочно-линейной функцией.

3. Путем преобразований в [1] получаем выражение для интеграла

$$\min F = \sum_{\alpha} \mu Z_\alpha(a_\alpha + b_\alpha) - v(fV \sum_i \mu Z_i) - \sum_i KA\, Z_i(p_i - q_i),$$

где переменными являются a_α, b_α, p_α, q_α, v_1, v_2.

4. Запускаем для функционала генетический алгоритм.

4. Преимущество данного метода перед другими. Существуют два главных преимущества применения генетических алгоритмов перед классическими оптимизационными методиками:

1. ГА не имеет значительных математических требований к видам целевых функций и ограничений. Исследователь не должен упрощать модель объекта, теряя ее адекватность и искусственно добиваясь возможности применения доступных математических методов. При этом могут использоваться самые разнообразные целевые функции и виды ограничений (линейные и нелинейные), определенные на дискретных, непрерывных и смешанных универсальных множествах.

2. При использовании классических пошаговых методик глобальный оптимум может быть найден только в том случае, когда проблема обладает свойством выпуклости. В тоже время эволюционные операции генетических алгоритмов позволяют эффективно отыскивать глобальный оптимум.

Заключение:

1. Для двумерных задач со свободной (заранее неизвестной) границей разработан численные алгоритм, позволяющий найти ее положение, которое определяется из условия минимальности соответствующего функционала.

2. Выявлено, что увеличение скорости проскальзывания приводит к вырождению области сцепления E_0 (см. рисунок 2) и возрастанию коэффициента трения.

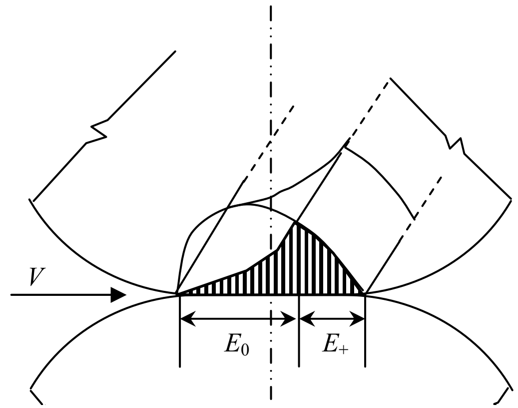

Рисунок 2 – Распределение касательных напряжений при качении цилиндров

3. Разработанный алгоритм позволяет определить области сцепления E_0.

Список литературы: **1.** *Калкер Й.* Принцип минимума для закона сухого трения с приложением к задаче о качении упругих цилиндров. Основные положения // Прикладная механика. Труды Америк. Общества инженеров-механиков. – 1971. – С.160-166. **3.** *Bhattacharya K., Kohn R.V.* // Arch. Rational Mech. Anal. 1997. 139, 99-180. **4.** *Mielke A., Theil F., Levitas V.I.* // Arch. Rational Mech. Anal. 2002, 162, 137-177. **5.** *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1985. **6.** *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. **7.** *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. **8.** *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. **9.** *Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.* MATLAB7. – СПб.: Изд. БХВ-Петербург, 2005.

Поступила в редколлегию 04.05.11